SIFAT-SIFAT BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT-UKURAN UNTUK GRAF MULTIPARTIT SEIMBANG LENGKAP

Haida Fitri
IAIN BUKITTINGGI
haidanabibi@gmail.com

ABSTRACT

For complete balanced multipartite graphs $K_{n\times l}$ and $K_{s\times t}$, the size multipartite Ramsey number $m_j(K_{n\times l},K_{s\times t})$ is the smallest natural number ζ such that an arbitrary colouring of the edges of $K_{j\times\zeta}$, using the two colours red and blue, necessarily forces a red $K_{n\times l}$ or a blue $K_{s\times t}$ as subgraph. In this paper, also discuss about the properties of size multipartite Ramsey numbers in complete balanced multipartite graphs such as, partial existence propertie, growth properties, gaps propertie and asymptotic limits propertie.

Keywords: *Set/ size multipartite Ramsey numbers, multipartite graph, balanced multipartite graph, complete balanced multipartite graph.*

I. PENDAHULUAN

Teori Ramsey pertama kali diperkenalkan oleh Frank Plumton Ramsey tahun 1930, dalam makalahnya yang berjudul *A Problem of Formal Logic*. Selanjutnya, Erdös dan Szekeres pada tahun 1935 mengaplikasikan ke dalam teori graf, mereka membuktikan bahwa jika diberikan dua bilangan asli a dan b dengan $a,b \geq 2$, maka terdapat bilangan asli t sedemikian sehingga, jika sisi-sisi dari graf lengkap dengan t titik diwarnai dengan warna merah atau biru, maka graf tersebut akan selalu memuat graf lengkap K_a dengan warna merah atau K_b berwarna biru sebagai subgraf. Adapun definisi dari bilangan Ramsey Klasik diberikan pada definisi berikut.

Definisi 1.1 (Erdös dan Szekeres, 1935) *Untuk sebarang bilangan bulat positif a dan b, bilangan Ramsey $R(a,b)$ didefinisikan sebagai suatu bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf lengkap K_n, akan memuat subgraf dengan semua sisi berwarna merah yang isomorfik dengan graf lengkap K_a atau memuat subgraf dengan semua sisi berwarna biru yang isomorfik dengan graf lengkap K_b.*

Selanjutnya, studi bilangan Ramsey diperluas dengan mengganti graf lengkap dengan graf bipartit yang disajikan pada definisi 1.2 berikut.

Definisi 1.2 *Misalkan m dan n adalah dua bilangan bulat positif,* ***bilangan*** *Ramsey bipartit $b(m,n)$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terkecil t sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf bipartit lengkap $K_{t,t}$ diberi dua pewarnaan yaitu merah-biru akan memuat subgraf monokromatik $K_{m,m}$ dengan warna merah atau $K_{n,n}$ dengan warna biru.*

Hatting dan Henning pada tahun 1998 memberikan batas atas dari bilangan Ramsey bipartit $b(m,n)$ sebagai berikut.

Teorema 1.3 *Untuk setiap dua bilangan bulat positif m dan n, berlaku*

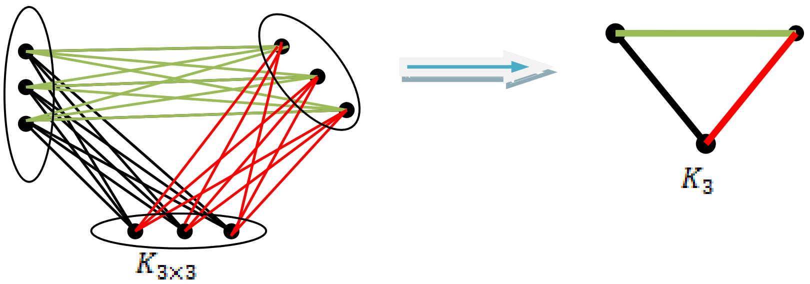
$$b(m,n) \leq \binom{m+n}{m} - 1. \square$$

Definisi 1.1 digeneralisasi yaitu dengan memberi warna semua sisi graf semula dengan dua warna dan mencari subgraf monokromatik untuk graf multipartit, seimbang dan lengkap. Dengan generalisasi seperti ini, pendekatan alamiah yang dilakukan adalah memberikan jumlah titik yang tetap dari setiap himpunan partit dalam graf domainnya, kemudian mencari jumlah minimum himpunan partit sehingga graf domain tersebut akan memuat subgraf multipartit monokromatik. Jumlah minimum inilah yang disebut dengan bilangan Ramsey multipartit-himpunan, seperti yang disajikan pada definisi berikut.

Definisi 1.4 (Burger dan Vuuren,2004) *Misalkan j, l, n, s dan t bilangan – bilangan asli dengan* $n, s \geq 2$. *Bilangan ramsey multipartit-himpunan* $M_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ *adalah bilangan asli terkecil* ξ *sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf* $K_{\xi\times j}$ *diberi warna merah dan biru sebarang, maka graf* $K_{\xi\times j}$ *akan memuat subgraf* $K_{n\times l}$ *merah atau* $K_{s\times t}$ *biru.*

Definisi 1.5 (Burger dan Vuuren,2004) (*Ekspansi Pewarnaan*). *Suatu pewarnaan sisi–sisi dari* $K_{k\times j}$ *dikatakan ekspansi pewarnaan, jika untuk setiap pasangan himpunan–himpunan partit dari* $K_{k\times j}$, *sisi–sisi antara semua titik dalam himpunan–himpunan partit ini mempunyai warna yang sama. Oleh karena itu setiap ekspansi pewarnaan dari* $K_{k\times j}$ *berkorespondensi ke tepat satu warna sisi dari* K_k *(dengan mengkontraksi setiap himpunan partit dari* $K_{k\times j}$ *ke satu titik) dan dikatakan ekspansi pewarnaan* $K_{k\times j}$ *diinduksi oleh pewarnaan yang bersesuaian dari* K_k.

Pada Gambar 1 diperlihatkan suatu ekspansi pewarnaan dari graf $K_{3\times 3}$



Gambar 1 : Ekspansi pewarnaan $K_{3\times 3}$ diinduksi oleh pewarnaan yang bersesuaian dari K_3.

Adapun definisi dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran diberikan pada definisi 1.6, yaitu.

Definisi 1.6 (Burger dan Vuuren,2004) *Misalkan j, l, n, s dan t bilangan– bilangan bulat positif dengan* $n, s \geq 2$. *Maka bilangan Ramsey multipartit-ukuran* $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ *adalah bilangan bulat terkecil* ζ *sehingga, jika semua sisi dari graf* $K_{j\times\zeta}$ *diberi warna merah dan biru secara sebarang, maka graf* $K_{j\times\zeta}$ *akan memuat subgraf* $K_{n\times l}$ *dengan warna merah atau subgraf* $K_{s\times t}$ *dengan warna biru.*

Bilangan Ramsey multipartit-ukuran dapat juga dipandang sebagai perumuman dari bilangan Ramsey klasik yaitu jika $R(\sigma, \lambda) = \tau$ maka $m_\tau(K_{\sigma\times 1}, K_{\lambda\times 1}) = 1$.

Off-diagonal bilangan Ramsey multipartit-ukuran memiliki sifat semetris yang disajikan pada proposisi berikut.

Proposisi 1.7 (Burger dan Vuuren,2004) *Jika bilangan Ramsey multipartit-ukuran* $m_k(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ *ada, maka* $m_k(K_{s\times t}, K_{n\times l}) = m_k(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ *untuk setiap j, l, n, s dan t bilangan– bilangan asli dengan* $n, s \geq 2$.

Bukti. Untuk setiap *j, l, n, s* dan *t* bilangan bulat dengan *n*, $s \geq 2$ dan misal $m_k(K_{n\times l}, K_{s\times t}) = r$. Berdasarkan Definisi 1.6 $m_k(K_{n\times l}, K_{s\times t}) = r$ berarti setiap untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{k\times r}$ akan memuat $K_{n\times l}$ berwarna merah

atau memuat $K_{s\times t}$ berwarna biru sebagai subgraf, hal ini dapat juga ditulis untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{k\times r}$ akan memuat $K_{n\times l}$ dengan warna biru atau memuat $K_{s\times t}$ dengan warna merah sebagai subgraf, dengan kata lain $m_k(K_{s\times t}, K_{n\times l}) = r$. Jadi terbukti bilangan Ramsey multipartit-ukuran juga bersifat simetris yaitu,
$m_k(K_{n\times l}, K_{s\times t}) = m_k(K_{s\times t}, K_{n\times l})$. □

Berdasarkan uraian di atas pada artikel ini, akan dikaji tentang sifat-sifat dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap yaitu sifat eksistensi parsial, sifat *Growth*, sifat *gaps* dan sifat limit asimtotik.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan diperlihatkan tentang sifat-sifat dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk graf multipartit sembang lengkap. Untuk sifat pertama akan diperlihatkan eksistensi dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Teorema 2.1 (Eksistensi Parsial) *Bilangan Ramsey multipartit-ukuran* $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ *ada untuk sebarang* $n, s \geq 2$ *dan* $l, t \geq 1$ *jika dan hanya jika* $j \geq R(n, s)$.

Bukti. Pertama–tama akan ditunjukkan $j \geq R(n, s)$ jika $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ ada untuk sebarang $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$. Dalam hal ini, digunakan kontraposisi dengan mengasumsikan $j < R(n, s)$, akan diperlihatkan $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ tidak ada untuk $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$. Perhatikan bahwa $1 \leq j < R(n, s)$ untuk $n, s \geq 2$, sesuai dengan Definisi 1.1 berarti terdapat suatu dua pewarnaan merah dan biru dari semua sisi graf K_j yang tidak memuat K_n dengan warna merah maupun K_s dengan warna biru sebagai subgraf. Karena $K_n \subseteq K_{n\times l}$ dan $K_s \subseteq K_{s\times t}$ untuk sebarang $l, t \geq 1$, dari Definisi 1.5 yaitu dengan ekspansi pewarnaan $K_{j\times k}$ diinduksi oleh pewarnaan yang bersesuaian dari K_j. Akibatnya $K_{j\times k}$ juga tidak memuat $K_{n\times l}$ dengan warna merah dan $K_{s\times t}$ dengan warna biru sebagai subgraf untuk sebarang $k \geq 1$. Berarti nilai $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ tidak ada, jadi terbukti $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ ada untuk sebarang $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$ maka $j \geq R(n, s)$.

Selanjutnya, akan dibuktikan $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ ada untuk sebarang $n, s \geq 2$ dan $l, t \geq 1$ jika $j \geq R(n, s)$. Diketahui bahwa bilangan Ramsey bipartit diagonal seimbang lengkap $m_2(K_{2\times l}, K_{2\times l})$ ada yang dijamin oleh Teorema 1.3 yaitu, $m_2(K_{2\times l}, K_{2\times l}) \leq \binom{2l}{l} - 1$ untuk setiap $l \geq 1$. Oleh karena itu, selalu dapat ditentukan sebarang subgraf bipartit monokromatik untuk setiap dua pewarnaan dari semua sisi sebuah graf bipartit F. Misalkan *G* sebuah graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri atas $R(n, s)$ partit. Warnai sisi-sisi *G* menurut algoritma berikut.

1. Setiap partit di *G*, diberi indeks H_0.
2. Pilih sebarang dua partit, dengan sisi-sisi yang menghubungkannya belum diwarnai. Jika sisi-sisi yang tidak terkait ke salah satu himpunan partit yang dipilih belum diwarnai, maka warnai semua sisi tersebut secara sebarang dengan menggunakan warna merah dan biru. Berarti ada sebuah graf bipartit monokromatik termuat dalam subpewarnaan ini dan indeks dari masing– masing himpunan partit yang memuat subgraf monokromatik tersebut adalah H_1. Untuk yang lainnya, jika sisi-sisi yang terkait dengan salah satu atau kedua partit yang dipilih dan telah diwarnai sebelumnya, maka pilih subhimpunan-subhimpunan titik-titik dari masing-masing partit yang memiliki indeks tertinggi, masing-masing diberi indeks H_k dan H_m dengan $m \leq k$. Untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru dari sisi-sisi diantara

titik-titik partit yang memiliki indeks H_k dan titik-titik pada partit H_m akan memuat sebuah subgraf bipartit monokromatik seimbang lengkap, kemudian indeks himpunan-himpunan partit yang memuat subgraf monokromatik tersebut yaitu H_{k+1}.

3. Ulangi langkah ke-2 sampai terdapat warna sisi-sisi antara subhimpunan-subhimpunan dari setiap pasangan partit di *G*.

Dari hasil-hasil dalam algoritma di atas dan berdasarkan Definisi 1.5 yaitu dengan ekspansi pewarnaan dari $K_{R(n,s)\times|H_\alpha|}$ sebagai subgraf *G*, diinduksi oleh beberapa sisi dua pewarnaan dari $K_{R(n,s)}$ dengan H_α adalah indeks maksimal yang diperoleh dari algoritma di atas. Jadi, akan diperoleh sebuah subgraf $K_{n\times|H_\alpha|}$ dengan warna merah atau subgraf $K_{s\times|H_\alpha|}$ dengan warna biru. Selanjutnya warnai semua sisi sisa dari graf *G* dengan sebarang warna merah-biru. Kemudian dipilih himpunan partit semula yang cukup besar dari graf *G*, yaitu $|H_\alpha| \geq maks\{l,t\}$. Oleh karena itu, *G* akan memuat $K_{n\times l}$ berwarna merah dan $K_{s\times t}$ berwarna biru sebagai subgraf. Jadi terbukti $m_j(K_{n\times l},K_{s\times t})$ ada untuk $n,s \geq 2$ dan $l,t \geq 1$ jika $j \geq R(n,s)$. □

Dari Teorema 2.1 di atas terlihat bahwa bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap tidak selalu ada, maka teorema ini disebut juga sifat eksistensi parsial dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Berikut ini, sifat *growth* dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran yang disajikan dalam Proposisi 2.2

Proposisi 2.2 *Misal* $n,s,\alpha,\gamma \geq 2$, j,k,l,t,β *dan* δ *adalah bilangan–bilangan bulat positif, maka*

(1) $m_j(K_{n\times l},K_{s\times t}) \leq m_j(K_{\alpha\times\beta},K_{\gamma\times\delta})$ *jika* $n \leq \alpha, l \leq \beta, s \leq \gamma$ *dan* $t \leq \delta$ (*bila bilangan Ramsey multipartit-ukuran keduanya ada*).

(2) $m_j(K_{n\times l},K_{s\times t}) \leq m_k(K_{n\times l},K_{s\times t})$ *jika* $k \leq j$ (*bila bilangan Ramsey multipartit-ukuran keduanya ada*).

Bukti. (1) Untuk setiap $n,s,\alpha,\gamma \geq 2$ dan *j*, *k*, *l*¸ *t*, β dan δ adalah bilangan-bilangan bulat positif. Akan dibuktikan $m_j(K_{n\times l},K_{s\times t}) \leq m_j(K_{\alpha\times\beta},K_{\gamma\times\delta})$. Misalkan $m_j(K_{\alpha\times\beta},K_{\gamma\times\delta}) = w$ dengan $n \leq \alpha, l \leq \beta, s \leq \gamma$ dan $t \leq \delta$, sesuai dengan Definisi 1.6 berarti untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{j\times w}$ memuat $K_{\alpha\times\beta}$ dengan warna merah atau $K_{\gamma\times\delta}$ dengan warna biru sebagai subgraf, karena $n \leq \alpha$ dan $l \leq \beta$ sehingga $K_{n\times l} \subseteq K_{\alpha\times\beta}$, begitu juga untuk $s \leq \gamma$ dan $t \leq \delta$ maka diperoleh $K_{s\times t} \subseteq K_{\gamma\times\delta}$. Akibatnya terdapat sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{w\times j}$ memuat $K_{n\times l}$ dengan warna merah atau $K_{s\times t}$ dengan warna biru sebagai subgraf, atau dapat disimpulkan $m_j(K_{n\times l},K_{s\times t}) \leq w$. Jadi dapat dibuktikan $m_j(K_{n\times l},K_{s\times t}) \leq m_j(K_{\alpha\times\beta},K_{\gamma\times\delta})$.

(2) Untuk setiap *n*, $s \geq 2$ dan *j*, *k*, *l*, *t* adalah bilangan-bilangan bulat positif. Akan dibuktikan jika $k \leq j$ maka berlaku $m_j(K_{n\times l},K_{s\times t}) \leq m_k(K_{n\times l},K_{s\times t})$. Misalkan $m_k(K_{n\times l},K_{s\times t}) = p$ berdasarkan Definisi 1.6 berarti untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_{k\times p}$ memuat subgraf $K_{n\times l}$ dengan warna merah atau sebgraf $K_{s\times t}$ dengan warna biru. Karena $k \leq j$, akibatnya diperoleh $K_{w\times k} \subseteq K_{j\times p}$. Sehingga haruslah $K_{k\times p}$ juga memuat subgraf $K_{n\times l}$ dengan warna merah atau subgraf $K_{s\times t}$ dengan warna biru untuk sebarang dua pewarnaan merah-biru pada semua sisinya, atau sesuai dengan Definisi 1.6 dapat juga ditulis $m_j(K_{n\times l},K_{s\times t}) \leq p = m_k(K_{n\times l},K_{s\times t})$. □

Pada sifat *growth* terlihatkan bahwa $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t}) \leq m_j(K_{\alpha\times\beta}, K_{\gamma\times\delta})$, jika $K_{n\times l} \subseteq K_{\alpha\times\beta}$ dan $K_{s\times t} \subseteq K_{\gamma\times\delta}$. Selain itu, untuk dua bilangan Ramsey multipar-tit-ukuran dengan dua subgraf yang dikandungnya sama apabila jumlah himpunan partitnya semakin besar, mengakibatkan bilangan Ramsey multipartit-ukurannya akan semakin kecil.

Adapun Teorema 2.3 memperlihatkan sifat *Gaps* dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Teorema 2.3 *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 3, s \geq 2$ *dan* $j, l, t \geq 1$, *sehingga berlaku* $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t}) \geq m_j(K_{(n-1)\times l}, K_{s\times t}) + \lceil t/\lfloor j/s \rfloor \rceil - 1$.

Bukti. Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, $s \geq 2$ dan *j*, *l*, $t \geq 1$. Misalkan $m_j(K_{(n-1)\times l}, K_{s\times t}) = v$ dan $\lceil t/\lfloor j/s \rfloor \rceil - 1 = w$. Dari $m_j(K_{(n-1)\times l}, K_{s\times t}) = v$ akibatnya pada graf dengan *j* himpunan partit dan $(v-1)$ titik terdapat suatu dua pewarnaan merah-biru dari semua sisi $K_{j\times(v-1)}$ yang tidak memuat subgraf $K_{(n-1)\times l}$ dengan warna merah ataupun subgraf $K_{s\times t}$ dengan warna biru, bentuk pewarnaan ini diberi nama *G*. Selanjutnya, dibentuk pewarnaan sisi yang diberi nama *H*, yaitu suatu bentuk dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $K_{j\times w}$ diberi warna biru, kemudian setiap titik di $K_{j\times w} = F$ dihubungkan ke semua titik pada bentuk pewarnaan *G* dengan warna merah. Andaikan pada bentuk pewarnaan *H* memuat $K_{n\times l}$ dengan warna merah sebagai subgraf, karena *F* hanya memuat paling banyak satu himpunan partit dari $K_{n\times l}$ (sebab *F* tidak mempunyai sisi merah) akibatnya paling sedikit $(n-1)$ himpunan partit $K_{n\times l}$ harus di *G* . Tetapi hal ini kontradiksi dengan definisi pewarnaan *G*, sehingga dapat disimpulkan haruslah *H* tidak memuat $K_{n\times l}$ dengan warna merah sebagai subgraf.

Dibutuhkan paling sedikit $\lceil t/\lfloor j/s \rfloor \rceil$ himpunan partit dari himpunan– himpunan yang berukuran *j* sehingga graf mulipartit memuat subgraf $K_{s\times t}$ berwarna biru. Karena *H* memiliki himpunan partit berwarna biru di *F* hanya sebanyak $w = \lceil t/\lfloor j/s \rfloor \rceil - 1$ himpunan partit dan terhubung merah dengan titik-titik di *G*, sedangkan di *G* juga tidak memuat subgraf $K_{s\times t}$ berwarna biru, akibatnya *H* tidak memuat $K_{s\times t}$ dengan warna biru sebagai subgraf. Jadi *H* adalah suatu dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf $K_{(v+w-1)\times j}$ yang tidak memuat $K_{n\times l}$dengan warna merah ataupun $K_{s\times t}$ dengan warna biru sebagai subgraf.□

Pada teorema berikut, terlihat bahwa nilai bilangan Ramsey multipartit-ukuran akan mendekati 1 untuk nilai *j* yang semakin besar, sifat ini dikatakan sebagai sifat limit asimtotik untuk bilangan Ramsey multipartit-ukuran.

Teorema 2.4 *Jika* $n, s \geq 2$ *dan* $l, t \geq 1$, *maka*

$$m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t}) \to 1 \text{ bila } j \to \infty.$$

Bukti. Untuk *n*, $s \geq 2$, *l*, *j*, $t \geq 1$ dan dari Proposisi 2.2 bagian (2), dapat disimpulkan barisan $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ semakim kecil untuk *j* yang bertambah besar. Selanjutnya, akan ditunjukan ada bilangan bulat *k* sehingga $m_k(K_{n\times l}, K_{s\times t}) = 1$. Dari eksistensi bilangan Ramsey klasik, jelas terdapat suatu bilangan bulat *k* sehingga $R(nl, st) = k$. Jadi untuk setiap dua pewarnaan merah-biru pada semua sisi $K_k = K_{k\times 1}$ memuat K_{nl} dengan warna merah atau K_{st} dengan warna biru sebagai subgraf. Karena $K_{n\times l} \subseteq K_{nl}$ dan $K_{s\times t} \subseteq K_{st}$, akibatnya $K_{k\times 1}$ juga memuat $K_{n\times l}$ dengan warna merah atau $K_{s\times t}$ dengan warna biru sebagai subgraf, sehingga dari Definisi 1.6 dapat juga disimpulkan $m_k(K_{n\times l}, K_{s\times t}) = 1$. Karena barisan $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$

tidak naik untuk j yang semakin besar dan ada $j = k$ sehingga $m_k(K_{n\times l}, K_{s\times t}) = 1$ maka terbukti $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t}) \rightarrow 1$ untuk $j \rightarrow \infty$.□

III. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan dengan memperumum teori bilangan Ramsey klasik yaitu mengganti graf komplit dengan graf multipartit, seimbang dan lengkap oleh Burger dkk. Sehingga dapat diperlihatkan sifat–sifat dari bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap yaitu sifat *eksistensi* parsial, sifat *growth*, sifat *gaps* dan sifat limit asimtotik.

IV. DAFTAR PUSTAKA

Burger, A.P, dan J.H. Van Vuuren, Ramsey Numbers in complete balanced multipartite graphs. Part I : Set numbers, *Discrete Math*.,Vol 283, pp: 37-43, 2004.

Burger, A.P, dan J.H. Van Vuuren, Ramsey numbers in complete balanced multipartite graphs. Part II : Size numbers, *Discrete Math*., Vol. 283, pp: 45-49, 2004.

Chvátal, V dan F. Harary, *Generalised Ramsey theory for graphs, II: small diagonal numbers*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 32, pp: 389–394, 1972.

Chvátal, V dan F. Harary, Generalised Ramsey theory for graphs, III: small off-diagonal numbers, *Pasific J. Math*., Vol. 41, pp: 335–345, 1972.

Erdös, P dan G. Szekeres, A Combinatorial problem in geometry, *Composito Math*, Vol. 2, pp: 463–470, 1935.

Ramsey, F.P. *On a problem of formal logic*, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol.30, pp: 264-286, 1930.